

**I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ  
КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
ФММ**

2019 р.

*Перший курс*

1. Послідовність  $\{x_n\}$  задана за допомогою рекурентного спiввiдношення:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} \\ x_1 = \sqrt{6} \end{cases}$$

Знайдiть її границю.

2. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Яку криву 2 порядку задає рiвняння? Побудувати графiк цiєї кривої

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 & 2 \\ x & 8 & 2 & y \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2y & 3 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0$$

4. Двi протилежнi вершини ромба мають координати  $A(3; 5; 7)$  та  $B(1; -1; -3)$ . Третя вершина ромба лежить на прямiй

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = z.$$

Записати координати невiдомих вершин ромба та обчислити його площеу.

5. Позначимо через  $D$  множину точок площини, що знаходяться всерединi квадрата з вершинами  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ . Зобразiть геометричне мiсце таких точок  $Y$  на площинi, що

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1$$

для будь-якої точки  $X \in D$ . Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторiв.

6. З набору цiлих чисел  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{2018}, a_{2019})$  сформуємо новий набiр за правилом

$$\mathbf{a}' = \left( \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{2018} + a_{2019}}{2}, \frac{a_{2019} + a_1}{2} \right).$$

Визначити всi набори  $\mathbf{a}$ , для яких всi елементи всiх наборiв

$$\mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}''', \dots$$

є цiлими числами

**I ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
ФММ**

2019 р.

*Старші курси*

1. Підкидаються дві монети - справжня і фальшива. У фальшивої ймовірність випадіння герба вдвічі більша за ймовірність випадіння цифри. Проводиться два експерименти: спочатку підкидають справжню монету, доки не випаде цифра; потім те саме роблять для фальшивої монети. У результаті отримали  $n$  випадінь герба в першому випадку і  $m$  випадінь герба в другому. Яким співвідношенням пов'язані параметри  $m$  та  $n$ , якщо ймовірність другого експерименту принаймні вдвічі більша ймовірності первого?
2. Знайти значення параметру  $a$ , для якого

$$\int_a^{19} ||x^2 - 9| - 16| dx = 2012$$

3. Яку криву 2 порядку задає рівняння? Побудувати графік цієї кривої

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 & 2 \\ x & 8 & 2 & y \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2y & 3 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0$$

4. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

5. Числову послідовність  $(x_n, n \in \mathbb{N})$  визначено у рекурентний спосіб:

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2} \end{cases}$$

Довести збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$  та знайти його суму.

6. Знайти найменше значення виразу

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq 2019} a_i a_j,$$

де  $a_1, \dots, a_{2019} \in [-1; 1]$ .